Examen final de Análisis II
Tercero de Matemáticas - Grupo B

1. Considera las funciones complejas dadas para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$ por:
$$f(z)=\log\left(\frac{z-i}{z+i}\right); \qquad g(z)=\log(z-i)-\log(z+i)$$
a) Estudia dónde son holomorfas las funciones f y g.
b) ¿Dónde coinciden f y g?
c) Calcula el desarrollo de Taylor de g centrado en $z=1$.
d) Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n\,2^n}$ converge (absolutamente) y calcula su suma.
2. Sean f y g funciones enteras verificando que $|f(z)|\leqslant|g(z)|$ para todo $z\in\mathbb{C}$. Prueba que existe un número complejo λ con $|\lambda|\leqslant 1$ tal que $f(z)=\lambda g(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$ (usar el teorema de Liouville).
3. Sea $f:D(0,1)\to\mathbb{C}$ una función holomorfa. Se define
$$M(r)=\text{máx}\{|f(z)|:|z|=r\} \quad (0<r<1).$$
Supongamos que hay un número natural, n, tal que para todo $r\in]0,1[$ es $M(r)=r^n$. Prueba que $f(z)=\alpha z^n$ para todo $z\in D(0,1)$, donde $\alpha\in\mathbb{C}$ con $|\alpha|=1$ (usar el principio del módulo máximo).
4. Calcula las integrales:
a) $\displaystyle\int_{C(0,2a)}\frac{e^z}{a^2+z^2}dz \quad (a>0)$ (fórmula de Cauchy para una circunferencia)
b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\log|a+re^{it}|\,dt \quad 0<r<|a|$ (igualdad de la media)
5. Sea $f:D(0,1)\to\mathbb{C}$ holomorfa verificando $f(0)=1$ y $|\arg f(z)|<\pi/4$ para todo $z\in D(0,1)$. Prueba que :
$$|f(z)|^2\leq\frac{1+|z|}{1-|z|} \qquad \text{(lema de Schwarz)}$$
Si, además $f'(0)=1$ entonces:
$$f(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1/2}.$$

Teoría. Responder a una sola de las preguntas
1) Teorema de la aplicación abierta.
2) Forma general del teorema de Cauchy.

Los ejercicios 1, 4 y 5 puntúan 2 puntos. Los ejercicios 2 y 3 puntúan 1,5 puntos. La teoría puntúa 1 punto.
Las sugerencias que se dan entre paréntesis pueden ser útiles para hacer los ejercicios. Naturalmente, en cada caso **hay que justificar** que puede usarse el resultado indicado.

Granada, 11 de septiembre de 2003